ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 37-3 (2019), 89-109
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2431
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Razonamiento configural y desarrollo del discurso en la resolución de problemas empíricos en contexto geométrico

Configural reasoning and discourse development when solving empirical problems in a geometrical context

Antonio Saorín Villa, Germán Torregrosa Gironés, Humberto Quesada Vilella
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante. España.
ansaovi@gmail.com, german.torregrosa@ua.es, humberto.quesada@ua.es

RESUMEN • El objetivo de este estudio es identificar relaciones entre los procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas geométricos empíricos, desde la perspectiva del razonamiento configural, y el modo como los estudiantes desarrollan sus discursos escritos para comunicar la solución. Analizamos las respuestas escritas de 33 estudiantes de primero de Bachillerato a dos problemas empíricos. Los resultados muestran la tendencia de los estudiantes a ignorar la configuración geométrica presentada una vez establecidas en registro algebraico las relaciones necesarias y suficientes que permiten resolver el problema. Además, se pone de manifiesto, en el desarrollo del discurso, la transición desde el modo de acumulación al modo de sustitución en los razonamientos que permiten establecer una solución válida, así como la influencia de la configuración inicial en el desenlace del razonamiento configural.

PALABRAS CLAVE: Razonamiento configural; Expansión discursiva; Problemas empíricos; Geometría y álgebra.

ABSTRACT • The aim of this study is to identify the existing relationships in the cognitive processes involved in the resolution of empirical problems in a geometrical context, drawing on the configural reasoning perspective, and to analyze how students develop their written discourses to reach the solution of these problems. We pay attention to the written answers of 33 students belonging to the Spanish first year bachelor's degree and which were given for two empirical problems. The results show the students' tendency to ignore the geometrical configuration presented, after establishing, in the algebraical register, the necessary and sufficient relations that solve the problem. Additionally in the development of the discourse, it is revealed that the transition from the accumulation to the substitution mode in the reasoning process leads towards a valid solution establishment, as well as the influence of the initial configuration on the outcome of the configural reasoning process.

KEYWORDS: Configural reasoning; Discourse expansion; Empirical problems; Geometry and algebra.

Recepción: julio 2017 • Aceptación: marzo 2019 • Publicación: noviembre 2019

Saorín Villa, A., Torregrosa Gironés, G. y Quesada Vilella, H. (2019). Razonamiento configural y desarrollo del discurso en la resolución de problemas empíricos en contexto geométrico, *Enseñanza de las ciencias, 37*(3), 89-109
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2431

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es una actividad clave en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Al considerar la resolución de problemas en geometría, se genera, además, un contexto adecuado para el desarrollo de capacidades como la visualización y el razonamiento lógico-deductivo (Barrantes y Balletbo, 2012), así como el desarrollo de la argumentación en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002).

Las investigaciones relacionadas con la resolución de problemas geométricos han experimentado un gran desarrollo en los últimos años. Una de las líneas de investigación se centra en caracterizar los procesos cognitivos involucrados cuando los estudiantes resuelven problemas geométricos (Duval, 1998; Barrantes, 2003; Koleza y Kabani, 2006; Duval 2016a, 2016c). Otra línea de investigación gira en torno a la demostración o prueba matemática (Stylianides, 2007; Balacheff, 2008; Reiss, Heinze, Renkl y Groß, 2008; Komatsu, 2016). En particular, Arzarello y sus colegas (Arzarello, Michelletti, Olivero, Robutti y Paola, 1998; Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002, 2007; Arzarello, 2007) identifican dos fases en la resolución de problemas que requieren demostración: *a*) una *fase ascendente* caracterizada por la actividad empírica dirigida a la mejor comprensión del problema, la búsqueda de una conjetura y una posterior validación o rechazo; y *b*) una *fase descendente* caracterizada por la actividad argumentativa (deductiva o no) dirigida a la elaboración de una demostración de la conjetura planteada.

Según este modelo, la resolución de este tipo de problemas se caracteriza por la transición de la fase ascendente a la fase descendente, pudiendo darse varias transiciones en una u otra dirección entre ambas fases. Estas transiciones corresponden a momentos de trabajo empírico y otros de trabajo deductivo que pueden no conducir al resultado deseado, seguido de retrocesos para iniciar nuevas fases ascendentes que dan paso a nuevas fases descendentes. Garuti, Boero y Lemut (1998) explican esta interacción como un proceso en el que el estudiante trabaja en su enunciado mediante una actividad argumentativa progresiva, funcionalmente entremezclada con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones. En la etapa posterior de demostración, el estudiante desarrolla este proceso de forma coherente, organizando algunos de los argumentos previamente producidos en una cadena lógica.

En la mayoría de investigaciones referidas a la resolución de problemas en geometría, se utilizan problemas geométricos de prueba clásicos, esto es, problemas con enunciados que proporcionan hipótesis iniciales, a partir de las que se debe demostrar una tesis (hecho geométrico). Para su resolución, son necesarios conceptos o propiedades geométricas generales relacionados con configuraciones genéricas y una coordinación entre conocimientos y la configuración presentada que permita establecer afirmaciones matemáticas para generar un razonamiento lógico-deductivo que concluya con la tesis que debe ser demostrada.

Sin embargo, en los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato e incluso de grados universitarios de áreas técnicas, encontramos problemas geométricos que denominamos problemas empíricos y que presentan diferencias respecto a los clásicos: *a*) los enunciados no proporcionan hipótesis iniciales, sino datos concretos (longitudes, medidas de ángulos, etc.), expresados de forma numérica o como variables y asociados a situaciones geométricas particulares; *b*) suele aparecer el registro algebraico durante el proceso de resolución; *c*) no demandan una demostración matemática formal, sino el cálculo de un resultado asociado a una configuración particular y obtenido a partir de los datos iniciales; *d*) representan hechos o situaciones con un mayor nivel de concreción y, por ello, con mayor posibilidad de ser aplicados a situaciones reales que pueden representarse de forma geométrica; *e*) las estrategias de resolución se reducen en relación con los problemas clásicos, ya que solicitan calcular resultados numéricos a partir de datos concretos y no demostraciones de hechos geométricos generales, proporcionando contextos de resolución más *cerrados* que sugieren menos formas de abordar el problema (Torregrosa, 2017). En la figura 1 se muestra, con un ejemplo, la diferencia entre el enunciado de un problema clásico de prueba y el de un problema empírico.

Enunciado de problema clásico de geometría
Dadas dos cuerdas paralelas de una circunferencia, demostrar que la recta perpendicular a las cuerdas que pasa por el centro de la circunferencia contienen a los puntos medios de las cuerdas.
Enunciado de problema empírico
Las dos cuerdas paralelas de una circunferencia de la figura miden 12 y 16 cm. La distancia entre ellas es de 2 cm. Calcula el radio de la circunferencia.

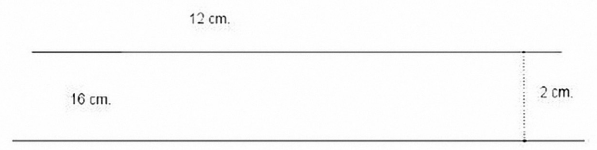


Fig. 1. Torregrosa (2017).

Por otro lado, la resolución de problemas empíricos involucra los mismos conocimientos y propiedades geométricas que la de problemas de prueba clásicos. Son necesarios conceptos o propiedades geométricas, coordinación entre estos conocimientos y una configuración geométrica que permita establecer afirmaciones matemáticas a partir de las que, mediante un razonamiento lógico-deductivo, encontrar una solución al problema en forma de resultado.

En este contexto y debido al mayor uso que se hace de los problemas geométricos empíricos en casi todos los niveles educativos frente a los problemas de prueba clásicos, surge la necesidad de tratar de comprender el comportamiento de los estudiantes al resolverlos. Este hecho nos lleva a plantearnos el objetivo de identificar características de la coordinación entre los procesos de visualización desarrollados durante la resolución de problemas empíricos y el modo como los estudiantes construyen la respuesta escrita que permite comunicar la solución. Para ello, en el apartado «marco teórico» consideramos el modelo «razonamiento configural» (Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010), junto a su posterior extensión (Torregrosa, 2017) y la forma en que los estudiantes enlazan las diferentes afirmaciones matemáticas que componen la respuesta escrita según los «modos de expansión» propuestos por Duval (1999). A continuación, en el apartado «método» describimos las características y el contexto de los participantes, el instrumento de investigación utilizado y el proceso de análisis realizado. Tras esto, presentamos los resultados obtenidos, para finalizar con su discusión y la exposición de las conclusiones del estudio.

MARCO TEÓRICO

Razonamiento configural

Duval (1998, 2016a) considera, en la resolución de problemas de geometría, tres tipos de procesos cognitivos relacionados con la visualización: aprehensión perceptiva, aprehensión discursiva y aprehensión operativa. La aprehensión perceptiva permite la identificación simple de una configuración, siendo la más intuitiva de los tres tipos de aprehensiones. La aprehensión discursiva se presenta al asociar una configuración identificada con afirmaciones matemáticas (teoremas, definiciones, etc.), pudiendo realizarse desde la configuración hacia el discurso o viceversa mediante un cambio de anclaje visual-discursivo o discursivo-visual. La aprehensión operativa se produce al modificar, física o mentalmente, la configuración inicial para identificar subconfiguraciones, añadiendo o quitando elementos geométricos para obtener nuevas subconfiguraciones (cambio figural) o mediante la manipulación de las subconfiguraciones iniciales identificadas como piezas de un puzle (reconfiguración).

Al centrar nuestra atención en el desarrollo de la acción coordinada entre las aprehensiones operativa y discursiva, podemos identificar características de las relaciones establecidas entre elementos de una configuración geométrica, su vinculación con afirmaciones matemáticas y las relaciones lógicas entre estas que generan un razonamiento conducente a la resolución de un problema. Dicho proceso se denomina «razonamiento configural» (Torregrosa y Quesada, 2007). El modelo razonamiento configural nos permite analizar la coordinación entre las aprehensiones operativa y discursiva durante el proceso de razonamiento, lo que puede permitirnos identificar y comprender los factores que desencadenan un razonamiento lógico-deductivo y que permiten finalizarlo con éxito. El razonamiento configural puede desembocar en tres situaciones: *a*) «truncamiento», si la coordinación entre aprehensiones proporciona la «idea» que permite al resolutor conocer cómo resolver el problema para posteriormente generar un proceso deductivo; *b*) «conjetura sin demostración», si el proceso de razonamiento conduce al establecimiento de una solución fundamentada en conjeturas no demostradas previamente, y *c*) «bucle», si el razonamiento conduce a un bloqueo que no permite avanzar hacia la solución.

Varias investigaciones han utilizado el modelo razonamiento configural para analizar las respuestas de estudiantes a problemas geométricos de prueba clásicos (Llinares y Clemente, 2014; Clemente y Llinares, 2015; Clemente, Torregrosa y Llinares, 2015; Clemente, Llinares y Torregrosa, 2017; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017a). Sin embargo, este modelo no contempla la aparición del registro algebraico al analizar problemas clásicos de prueba, pues el proceso de resolución se apoya en conjeturas geométricas válidas que desembocan en una demostración formal. Por ello, se hace necesario introducir el registro algebraico en el modelo razonamiento configural (Torregrosa, 2017; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017b) para poder analizar las respuestas a problemas empíricos geométricos, ya que involucran el registro algebraico durante el proceso de resolución. Además, se introducen datos (medidas, variables, etc.) en el enunciado (condiciones iniciales) relacionados con conceptos geométricos concretos aplicados a situaciones particulares, en lugar de las hipótesis iniciales ligadas a conocimientos geométricos generales de los problemas clásicos.

En este sentido, justificamos la inclusión del registro algebraico, desde el punto de vista cognitivo, a partir de los conceptos de *tratamiento* y *conversión* de la teoría de los registros semióticos de Duval (1999). Entendemos por tratamiento las transformaciones de una representación realizadas dentro de un mismo registro, ya sea en el registro geométrico, discursivo o algebraico, como por ejemplo al simplificar una expresión algebraica para resolver la ecuación asociada. Cuando cambiamos una representación de registro sin cambiar el objeto representado, hablamos de conversión (Duval, 2016b), como sucede al considerar una expresión algebraica que define una recta obtenida a partir de su representación gráfica. La introducción de estos conceptos en el modelo razonamiento configural nos permite considerar como afirmaciones matemáticas aquellos datos o condiciones particulares expresadas en registro algebraico y asociadas con la configuración geométrica planteada, y por lo tanto analizar las respuestas escritas a problemas empíricos geométricos.

Modos de expansión del discurso

El discurso generado durante la resolución de problemas en contextos geométricos puede proporcionarnos información relacionada con el razonamiento desarrollado por los estudiantes. En particular, sobre cómo construyen el discurso a partir de la interacción entre las subconfiguraciones identificadas y las afirmaciones matemáticas asociadas. Duval (1999) considera dos modos distintos de progresión discursiva. Los denomina «modos de expansión del discurso» y los divide en «acumulación» y «sustitución». En la expansión por acumulación se desarrolla un discurso compuesto por afirmaciones matemáticas independientes entre sí que reflejan información extraída a partir de los diferentes elementos que configuran el contexto particular de resolución, sin seguir un orden lógico. En el modo de sustitución se produce un discurso lógico, ordenado y progresivo que permite la transición entre las afirmaciones matemáticas involucradas a partir de inferencias. Cada afirmación es consecuencia lógica de la anterior, por lo que la concatenación no depende solo del contenido de la afirmación, sino que ha de considerarse, además, el estatus (hipótesis, conclusión, etc.) que desempeña en un momento concreto del proceso discursivo.

Basándose en el marco teórico expuesto, el objetivo de esta investigación es identificar relaciones entre los desenlaces del modelo de razonamiento configural y el modo como los estudiantes desarrollan el discurso escrito al resolver problemas empíricos en contextos geométricos y entorno de lápiz y papel.

MÉTODO

Participantes

En este estudio participaron 33 alumnos matriculados en primer curso de Bachillerato de un instituto de educación secundaria con edades comprendidas entre 15 y 17 años y pertenecientes al mismo grupo. Por lo tanto, no aplicamos ningún criterio de selección de los estudiantes en particular. Sí consideramos que los estudiantes hubieran estudiado en cursos anteriores los conocimientos geométricos necesarios para resolver los problemas. Además, habían tenido un acercamiento natural al proceso de resolución de problemas empíricos, al ser frecuentemente utilizados en las etapas de Bachillerato y de Educación Secundaria. Los estudiantes debían resolver dos problemas empíricos geométricos durante una sesión ordinaria de 55 minutos y comunicar de forma escrita el proceso de resolución.

Instrumento

Planteamos dos problemas cuya resolución involucraba conceptos, propiedades y configuraciones geométricas acordes al nivel curricular de los estudiantes. Los conocimientos geométricos necesarios que los estudiantes podían utilizar para resolver los problemas son: concepto de triángulo rectángulo, teorema de Pitágoras, concepto de circunferencia, concepto de radio y concepto y propiedades de las cuerdas de una circunferencia. En cada problema se presentaba un enunciado, con condiciones iniciales en forma de datos numéricos, asociado a una configuración geométrica (figura 2), y se solicitaba calcular las longitudes de los radios de las circunferencias presentes en cada configuración.

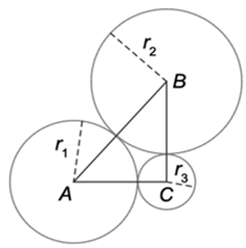
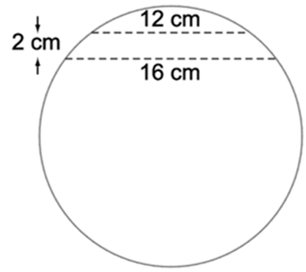
	Enunciado	Configuración Geométrica
Problema 1 (P1)	Los catetos de un triángulo miden 27 y 36 cm. Tomando como centro cada uno de los vértices del triángulo se trazan tres circunferencias de forma que son tangentes exteriores dos a dos. Calcula los radios de las tres circunferencias.	
Problema 2 (P2)	Las dos cuerdas paralelas dibujadas en la circunferencia de la figura miden 12 y 16 cm. La distancia entre ellas es de 2 cm. Calcula el radio de la circunferencia.	

Fig. 2. Problemas empíricos propuestos.

En un análisis preliminar de los problemas se consideró la existencia de subconfiguraciones relevantes que pudieran generar ideas que permitiesen guiar el proceso de resolución (Mesquita, 1998), ya que las configuraciones geométricas dadas desempeñan un papel descriptivo y proporcionan un contexto cerrado de resolución. En el problema 1 (en adelante P1), las posibles subconfiguraciones relevantes que se deben considerar en el proceso de resolución forman parte de la configuración inicial. Sin embargo, en el problema 2 (en adelante P2) han de ser construidas. Con la resolución de los problemas pretendíamos analizar, por un lado, la forma como los estudiantes identificaban (o construían) subconfiguraciones a partir de las configuraciones iniciales y cómo las asociaban con afirmaciones matemáticas mediante ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas; por otro lado, la forma como organizaban las afirmaciones matemáticas establecidas, tanto para la obtención de nueva información como para la comunicación, en forma de respuesta escrita, del razonamiento desarrollado para la resolución del problema.

De este modo, los datos recogidos y susceptibles de ser analizados fueron las respuestas escritas generadas por los estudiantes al resolver los problemas planteados.

Análisis

El análisis se realizó en tres fases. En la primera fase, se transcribieron y segmentaron las respuestas de los estudiantes en unidades de análisis. Entendemos por unidad de análisis cada una de las partes del discurso escrito generado para comunicar la solución (incluidos dibujos, etiquetas o marcas aparte de la configuración inicial, y/o del texto escrito) que reflejan la identificación o utilización de relaciones, propiedades, definiciones, etc., por parte de los estudiantes durante la resolución del problema (Clemente y Llinares, 2015). Además, se identificaron las distintas subconfiguraciones relevantes consideradas durante el proceso de resolución. En la segunda fase, se detectaron y analizaron los ciclos coordinados de aprehensiones operativas/discursivas para identificar los desenlaces del razonamiento configural. Además, identificamos conversiones entre registros y los tratamientos realizados. En la tercera fase, se consideraron los modos de expansión (Duval, 1999) presentes en el discurso generado (respuesta escrita). El análisis nos permitió comprender cómo los estudiantes establecían la solución a los problemas a partir de los procesos de visualización desarrollados y cómo organizaban las afirmaciones matemáticas obtenidas para construir un discurso escrito que comunicara la solución. Este hecho posibilitó la identificación de relaciones entre el razonamiento desarrollado y el modo como los estudiantes construyen la respuesta escrita.

Las figuras 3 y 4 muestran las fases I y II del análisis para la respuesta dada por el alumno 1 (AL1) a P2, que representa un razonamiento que proporciona una solución válida al problema y desemboca en un *truncamiento* del razonamiento configural.

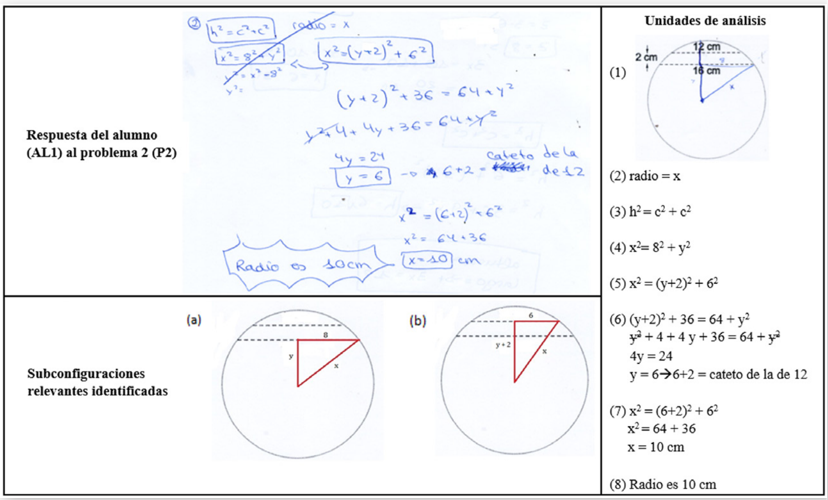


Fig. 3. Fase I del análisis.

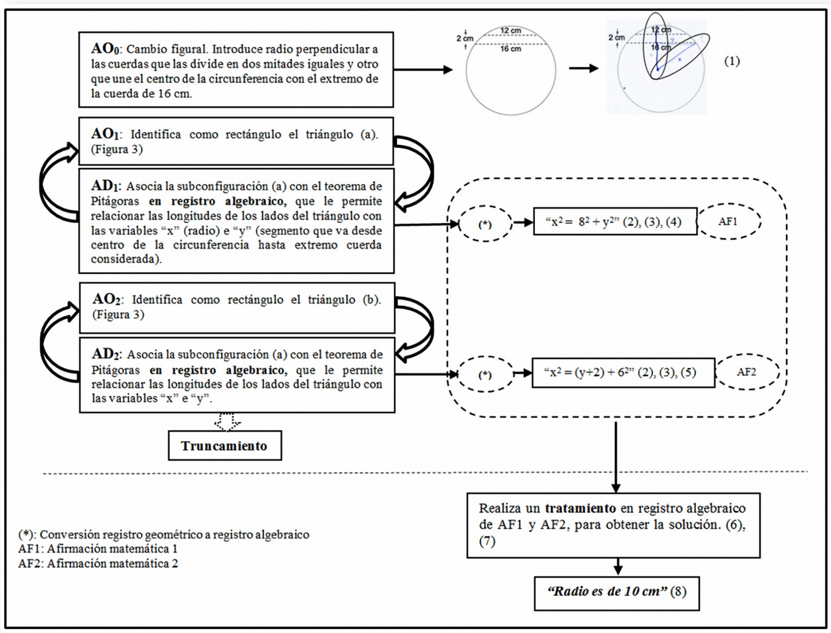


Fig. 4. Fase II del análisis. AO_i: aprehensión operativa; AD_i: aprehensión discursiva. Las dobles flechas representan coordinaciones entre aprehensiones.

Las dos primeras fases (figuras 3 y 4) implican el reconocimiento de subconfiguraciones relevantes (aprehensión operativa), a las que se asocian afirmaciones matemáticas (aprehensión discursiva) que van conformando el razonamiento que conduce (o no) a la solución del problema, así como la identificación de los procesos de conversión entre registros y de tratamiento dentro de un mismo registro.

En el caso mostrado, el estudiante inicia el razonamiento configural (figura 4) dibujando dos radios, uno perpendicular a las cuerdas dadas que las divide en dos mitades iguales y otro que une el centro de la circunferencia con el extremo de la cuerda de 16 cm. Este hecho le permite considerar la subconfiguración (a) (figura 3). Al identificarla como un triángulo rectángulo, la asocia con el teorema de Pitágoras en registro algebraico, lo que le permite establecer la afirmación matemática AF1, y de esta manera finaliza el primer ciclo del razonamiento configural ($AO_1 \leftrightarrow AD_1$). De forma análoga ($AO_2 \leftrightarrow AD_2$) obtiene la afirmación matemática AF2 en registro algebraico, a partir de la subconfiguración (b) (figura 3). Una vez que establece las afirmaciones AF1 y AF2, forma un sistema de ecuaciones, realizando un tratamiento en registro algebraico (método igualación), que le permite obtener en primer lugar el valor de *y* para posteriormente calcular el de *x*, resolviendo así el problema.

A partir del análisis, concluimos que el razonamiento configural desemboca en truncamiento, ya que la coordinación de aprehensiones discursivas y operativas, así como las conversiones realizadas entre los registros geométrico y algebraico, proporcionan al estudiante la «idea» que resuelve el problema, finalizando el razonamiento configural y realizando un tratamiento en registro algebraico para concluir el problema.

En la fase III del análisis se consideraron los modos de expansión (Duval, 1999) presentes en el discurso generado (respuesta escrita) durante la resolución del problema (figura 5). Este hecho nos permitió identificar el modo como los estudiantes organizaban las afirmaciones matemáticas a medida que avanzaba el proceso de resolución, hasta conformar el discurso que les permitía comunicar la solución al problema.

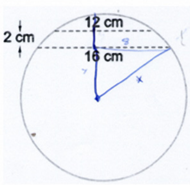
Unidades de análisis	Modos expansión discurso
(1) 	No contenida en la respuesta escrita del estudiante, sino sobre la configuración inicial presentada.
(2) radio = x	Acumulación
(3) $h^2 = c^2 + c^2$	
(4) $x^2 = 8^2 + y^2$	
(5) $x^2 = (y+2)^2 + 6^2$	
(6) $(y+2)^2 + 36 = 64 + y^2$ $\cancel{y^2} + 4 + 4y + 36 = 64 + \cancel{y^2}$ $4y = 24$ $y = 6 \rightarrow 6+2$ = cateto de la de 12	Sustitución
(7) $x^2 = (6+2)^2 + 6^2$ $x^2 = 64 + 36$ $x = 10$ cm	
(8) Radio es 10 cm	

Fig. 5. Modos de expansión del discurso identificados.

En este caso, el alumno comienza recopilando información relacionada con la subconfiguración relevante (a) (figura 3), tal y como se desprende de las afirmaciones (2), (3) y (4). En (2) escribe la relación entre la longitud del radio y la variable *x*, previamente indicada en la subconfiguración. En (3) escribe la forma general del teorema de Pitágoras, para en (4) aplicarlo a los valores concretos del triángulo rectángulo identificado. Estas tres afirmaciones no son consecuencia lógica una de otra, sino que son el resultado de la información extraída de la subconfiguración identificada y expresadas en registro algebraico. De forma análoga, la información extraída a partir de la subconfiguración (b) le permite establecer la afirmación (5). Por lo tanto, el alumno construye estas afirmaciones mediante un modo de acumulación, ya que extrae y acumula toda la información posible de las subconfiguraciones relevantes identificadas.

Sin embargo, las afirmaciones (6), (7) y (8) son establecidas a partir del procesamiento lógico de la información ya acumulada en registro algebraico y sintetizada en las afirmaciones (4) y (5). Establece en (6) la igualdad de (4) y (5) (igualación), realizando un tratamiento para obtener el valor de la variable *y* que le permite calcular el valor de la variable *x* en (7) mediante otro tratamiento (sustitución). Por último, asocia el valor de *x* con la longitud del radio, tal y como se muestra en la afirmación (8), concluyendo así el problema. Por ello, en esta parte del discurso escrito se genera un razonamiento lógico-deductivo donde cada afirmación es consecuencia lógica de la anterior, construyéndose mediante un modo de sustitución. De esta forma, para el «truncamiento» mostrado, los estudiantes comienzan a construir el discurso escrito acumulando información extraída directamente de las subconfiguraciones relevantes identificadas, para finalizarlo mediante un modo de sustitución.

RESULTADOS

Los resultados serán presentados en dos apartados. En el primero, describimos características del proceso de resolución de los problemas en función de los desenlaces del razonamiento configural identificados que permiten el establecimiento de una solución (válida o no). En el segundo, damos cuenta del modo como los estudiantes construyen sus respuestas escritas según los modos de expansión del discurso.

Razonamiento configural y problemas empíricos

Los resultados muestran diferencias significativas en relación con el número de desenlaces truncamiento y conjetura sin demostración del razonamiento configural en función del problema considerado (tabla 1).

Tabla 1.
Incidencia de los desenlaces del razonamiento configural

	Desenlaces razonamiento configural				
	Truncamiento	*Conjetura sin demostración*	*Bucle*	*En blanco*	*Total*
P1	14 (42,42%)	6 (18,18%)	8 (24,24%)	5 (15,15%)	33 (100%)
P2	1 (3,03%)	13 (39,39%)	6 (18,18%)	13 (39,39%)	33 (100%)
	Establecen una solución		*No establecen solución*		

En P1 observamos que la mayoría de los razonamientos que establecen una solución desembocan en truncamiento (42,42 %), mientras que en P2 lo hacen en conjetura sin demostración (39,39 %). Este hecho indica que P1 ha sido más accesible para los estudiantes que P2, aunque los conocimientos necesarios para resolverlos sean prácticamente los mismos, por lo que las características de las configuraciones iniciales podrían ser determinantes en la diferencia existente en el número de truncamientos (42,42 % para P1 frente a un 3,03 % para P2) y en el número de desenlaces conjetura sin demostración (18,18 % para P1 frente a un 39,39 % para P2) en función del problema considerado.

Consideramos que se da un truncamiento en el instante en que el alumno sabe cómo resolver el problema. Este momento se pone de manifiesto cuando los estudiantes establecen las relaciones necesarias y suficientes que solucionan el problema y son conscientes de ello, a pesar de no haber finalizado el proceso de resolución, como se aprecia en los ejemplos mostrados en las figuras 6 y 7. Nótese en la figura 6, por ejemplo, que el estudiante AL8 identifica adecuadamente la relación indicada en el punto (3), la expresa de forma errónea, aunque más abajo, durante el tratamiento, la utiliza expresándola de manera correcta, por lo que la consideramos válida.

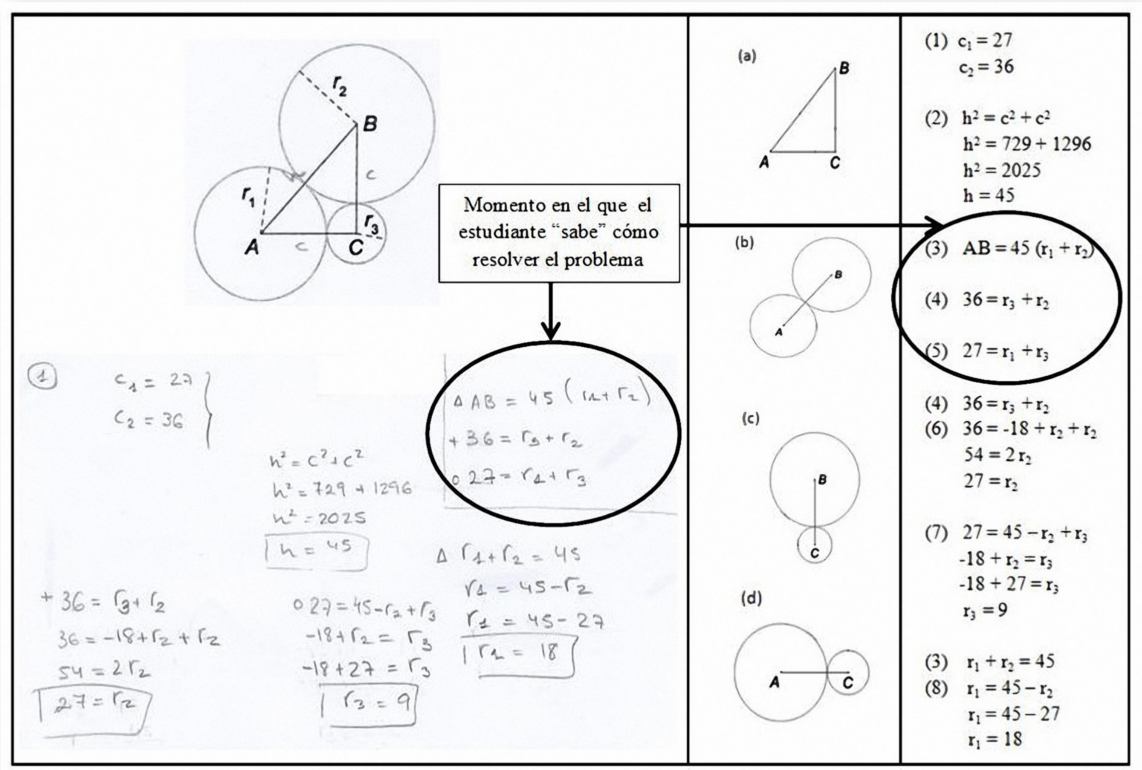


Fig. 6. Respuesta de AL8 a P1. Momento en el que se da el truncamiento.

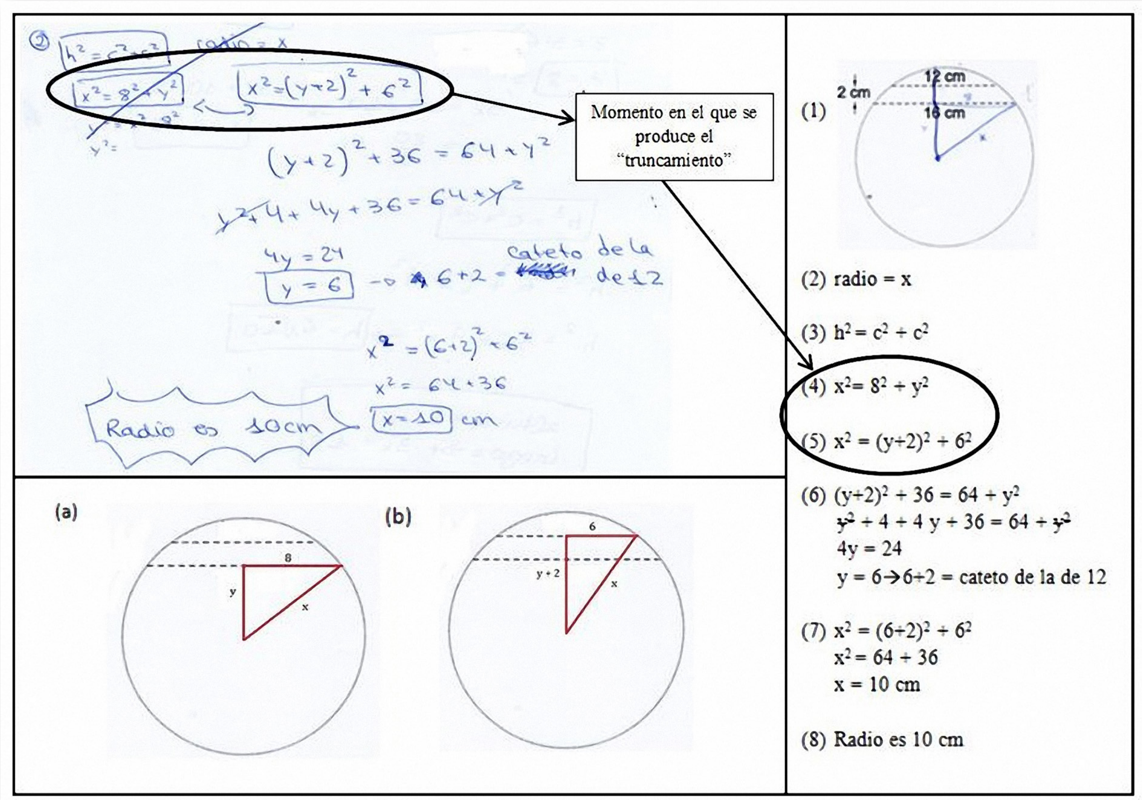


Fig. 7. Respuesta de AL1 a P2. Momento en el que se da el truncamiento.

En ambos casos observamos que el truncamiento se produce antes de comenzar el tratamiento (en registro algebraico) de las relaciones (afirmaciones matemáticas) que permiten resolver el problema. Una vez se da el truncamiento y los estudiantes comienzan con el tratamiento algebraico de las relaciones establecidas, abandonan el registro geométrico. Hemos detectado errores durante el tratamiento algebraico de las relaciones establecidas, a pesar de ser las adecuadas para resolver el problema, por lo que no todos los truncamientos identificados proporcionan la solución correcta. En la figura 8 se muestran, por ejemplo, las relaciones que conducen a solucionar P1; sin embargo, el estudiante AL3 comete un error en el tratamiento durante el registro algebraico de estas, al determinar que la longitud del radio r_1 es igual a cero, resultado incoherente con el problema planteado. El estudiante parece ser consciente de ello, indicándolo de forma explícita mediante la expresión «no sense», que podríamos traducir del inglés como 'sin sentido'.

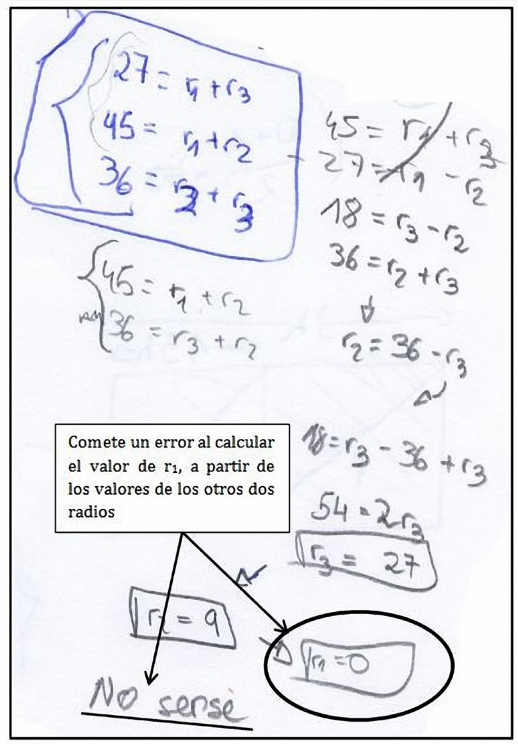


Fig. 8. Fragmento respuesta de AL3 a P1. Error en el tratamiento durante el registro algebraico.

En todos los truncamientos detectados al resolver P1, han sido consideradas las mismas subconfiguraciones relevantes (mostradas en la figura 6). Para P2, tenemos que solo tres estudiantes construyen las subconfiguraciones relevantes necesarias (mostradas en la figura 7) para resolverlo, aunque solo uno presenta como desenlace un truncamiento del razonamiento configural. Los otros dos estudiantes no establecen las relaciones correctas o las basan en conjeturas no demostradas previamente.

Este comportamiento parece indicar que las características implícitas de las configuraciones presentadas permitieron a los estudiantes identificar las subconfiguraciones relevantes adecuadas en la totalidad de los truncamientos detectados en P1. En P2, debido a la dificultad del proceso de construcción de las subconfiguraciones relevantes necesarias para su resolución, la mayoría de los estudiantes fundamentaron sus razonamientos en inferencias o conjeturas no demostradas, extraídas directamente de la configuración inicial, lo que se tradujo en un predominio del desenlace conjetura sin demostración. Por lo tanto, las características intrínsecas de las configuraciones geométricas iniciales pueden ser un factor que influye en la identificación de subconfiguraciones relevantes y, por ello, en el proceso de razonamiento desarrollado (Mesquita, 1998; Llinares y Clemente, 2014; Clemente, Torregrosa y Llinares, 2015; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017b), al resolver problemas empíricos en contexto geométrico, explicando así el desenlace del razonamiento configural predominante en función del problema considerado.

Por otro lado, respecto al desenlace conjetura sin demostración, hemos detectado dos estrategias de resolución diferentes en función de la consideración o no del registro geométrico durante la etapa final del razonamiento que da solución al problema. La figura 9 muestra la respuesta del alumno AL18 a P1, las subconfiguraciones relevantes y las unidades de análisis que nos permiten describir la primera estrategia de resolución.

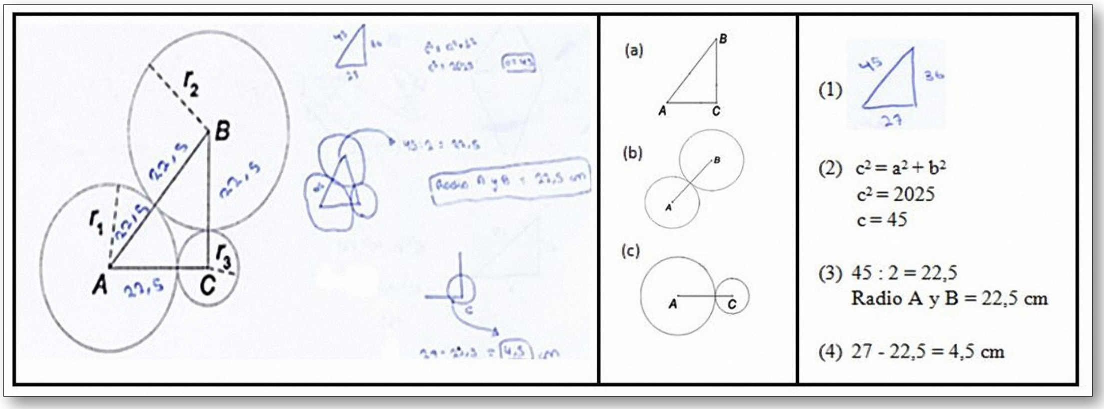


Fig. 9. Respuesta de AL18 a P1, subconfiguraciones relevantes y unidades de análisis.

El razonamiento configural realizado por el estudiante es el siguiente:

1. Considera la subconfiguración (a) formada por el ΔABC realizando una aprehensión operativa (AO_0). Identifica los catetos y les asocia los valores proporcionados por el enunciado mediante una aprehensión discursiva (AD_0).
2. Asocia la subconfiguración (a) (AO_1) con el teorema de Pitágoras (AD_1) en registro algebraico, relacionando las longitudes de los catetos con el lado desconocido ($\overline{AB}$, hipotenusa). Realiza un tratamiento para obtener su longitud (45 cm).
3. Considera la subconfiguración (b) formada por las circunferencias con centros en A y B y el segmento que los une (AO_2). Asocia su longitud (45 cm) con la suma de los radios de ambas circunferencias, conjeturando que dichos radios son congruentes (AD_2). Realiza una conversión de dicha relación al registro algebraico calculando el valor de los radios (22,5 cm).
4. Identifica la subconfiguración (c), formada por las circunferencias con centros en A y C, junto al segmento que los une (AO), asociando la longitud del radio de la circunferencia con centro en A con el valor obtenido en (2) (AD). Expresa dicha relación en registro algebraico y obtiene el valor del tercer radio (4,5 cm).

El razonamiento configural desemboca en conjetura sin demostración, puesto que acepta sin demostrar que los radios r_1 y r_2 son congruentes, acción sobre la que sustenta el razonamiento posterior que le permite dar una solución (errónea) al problema. El estudiante va estableciendo relaciones secuenciales en el registro algebraico a partir del registro geométrico, realizando continuos procesos de conversión hasta el final de su razonamiento. En este caso, al no establecer una o varias relaciones en el registro algebraico que le permitan resolver el problema con un único tratamiento en dicho registro y omitir el registro geométrico, necesita este para poder finalizar el razonamiento y dar una solución.

La figura 10 muestra la respuesta del alumno AL14 a P2, las subconfiguraciones relevantes y las unidades de análisis utilizadas para describir la segunda estrategia de resolución.

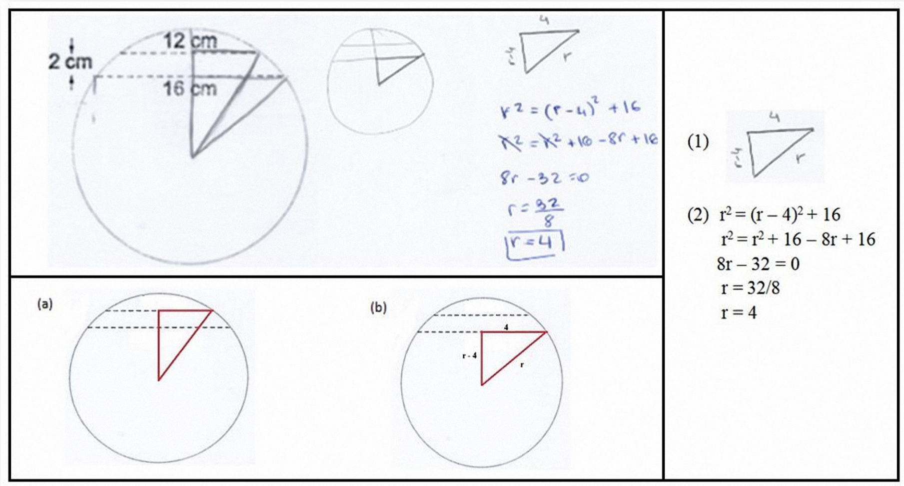


Fig. 10. Respuesta de AL14 a P2, subconfiguraciones relevantes y unidades de análisis.

El razonamiento configural realizado por el estudiante es el siguiente:

1. Construye dos triángulos rectángulos, (a) y (b), considerando (b) (AO_0), al que asocia los valores *r*, *r-4* y *4* en el registro algebraico (AD_0), siendo *r* el radio de la circunferencia.
2. Identifica la subconfiguración (b) (AO_1) y le asocia el teorema de Pitágoras en el registro algebraico (AD_2), estableciendo una relación entre los lados del triángulo considerado, para después realizar un tratamiento y obtener el valor del radio (4 cm), que le permite concluir (erróneamente) el problema.

El razonamiento configural desemboca en conjetura sin demostración, ya que la solución establecida se basa en dos inferencias no demostradas previamente: *a*) conjetura que la distancia entre la cuerda de 12 cm y la parte superior de la circunferencia es de 2 cm, valor inferido de forma errónea a partir del dato que indica la separación entre las cuerdas (2 cm), al asociar el valor de un cateto del triángulo considerado con la longitud del radio menos 4 cm; y *b*) asocia (de forma errónea) el valor del otro cateto con 4 cm, en lugar de 8 cm (mitad de la cuerda de 16 cm). Estas inferencias conducen al estudiante a considerar solo uno de los dos triángulos construidos sobre la configuración inicial, aunque para la resolución correcta del problema son necesarios ambos. Una vez que asocia el teorema de Pitágoras con el triángulo considerado, realiza una conversión al registro algebraico, estableciendo una relación (afirmación matemática) basada en conjeturas no demostradas (valores de los catetos), lo que le permite encontrar una solución (errónea) al problema tras un tratamiento en registro algebraico.

Por lo tanto, una vez que establece la relación en el registro algebraico (basada en dos conjeturas no demostradas), no vuelve a considerar el registro geométrico en el resto del proceso de resolución, ya que realiza un tratamiento y obtiene la solución (errónea) al problema, de forma similar a lo que sucedía en los truncamientos analizados.

Razonamiento configural y expansión del discurso

La incorporación de los modos de expansión del discurso (Duval, 1999) al proceso de análisis nos ha permitido identificar características en el proceso de construcción del discurso (respuesta escrita) generado por los estudiantes al resolver los problemas planteados.

En los truncamientos identificados, los estudiantes comienzan extrayendo información de las subconfiguraciones relevantes identificadas, convirtiéndola al registro algebraico en forma de afirmaciones matemáticas. Las afirmaciones establecidas de este modo no siguen un orden lógico, son independientes unas de otras y su función se limita a expresar, en registro algebraico, relaciones (o propiedades, teoremas, etc.) identificadas en la subconfiguración relevante considerada. Por lo tanto, el discurso escrito en esta fase inicial se desarrolla mediante un modo de acumulación, ya que los estudiantes recopilan toda la información posible que extraen de la/s subconfiguración/es relevante/s identificada/s. Una vez que han acumulado las relaciones suficientes que permiten resolver el problema, realizan un tratamiento algebraico de estas, que concluye con el establecimiento de la solución al problema. El tratamiento implica la obtención, de forma secuencial, de nuevas afirmaciones matemáticas que son consecuencia lógica de las precedentes. Por lo tanto, el discurso escrito, una vez iniciado el tratamiento algebraico, se desarrolla en forma de razonamiento lógico-deductivo hasta el establecimiento de la solución al problema (modo de sustitución).

En el caso de que sea necesario obtener algún dato intermedio para la resolución del problema, los estudiantes acumulan información de la subconfiguración identificada, la convierten al registro algebraico (afirmación matemática) y realizan un tratamiento para calcular el dato necesario. Una vez que obtienen su valor, continúan acumulando información hasta recopilar la cantidad necesaria de relaciones (afirmaciones matemáticas) que permitan resolver el problema tras el tratamiento correspondiente. En P1, los estudiantes deben calcular, en primer lugar, el valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo, para poder continuar con la resolución del problema. La figura 11 ilustra este hecho.

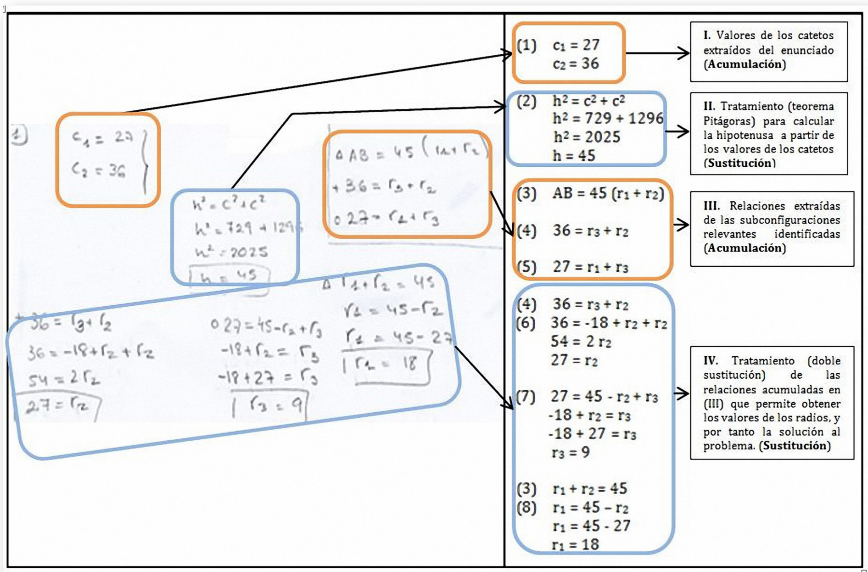


Fig. 11. Modos de expansión del discurso en la respuesta de AL8 a P1.

El discurso escrito para el desenlace conjetura sin demostración, mostrado en la figura 10, se desarrolla del mismo modo que en los truncamientos. Identificamos una fase de acumulación de información (asignación de valores, en función de la variable *r*, a cada lado del triángulo identificado) que permite el establecimiento de una relación (errónea) en el registro algebraico (mediante el teorema de Pitágoras) cuyo tratamiento permite dar una solución al problema (errónea) de forma lógica. El discurso escrito comienza con un modo de acumulación de información, para finalizar con un modo de sustitución, de igual forma que sucede en los truncamientos.

Sin embargo, en el caso de la conjetura sin demostración mostrada en la figura 9, se da el modo de sustitución únicamente para calcular el dato intermedio necesario (hipotenusa) para continuar con la resolución del problema. Tras esto, el estudiante infiere erróneamente la congruencia de los radios r_1 y r_2, hecho que le permite dar una solución al problema (errónea), simplemente extrayendo información de las diferentes subconfiguraciones relevantes identificadas. De esta forma, aunque el discurso escrito comienza con un modo de acumulación para pasar a un modo de sustitución (con el fin de encontrar el valor de la hipotenusa, en un paso intermedio conducente a la solución), finaliza en modo de acumulación, algo que no sucede en los truncamientos, ni en el caso anterior de conjetura sin demostración.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de la presente investigación es identificar relaciones entre los desenlaces del razonamiento configural y el modo como los estudiantes construyen el discurso escrito (respuesta) durante el proceso de resolución de problemas empíricos en contexto geométrico y entorno de lápiz y papel.

Los resultados obtenidos ponen de manifiesto que el truncamiento del razonamiento configural se produce en el momento en el que se establecen las relaciones necesarias y suficientes (en registro algebraico) que dan la solución al problema, ya que es en ese instante cuando el alumno sabe cómo resolverlo, aunque todavía no haya indicado solución alguna. Es entonces cuando el estudiante *trunca* (deja de realizar) los ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas, para realizar un tratamiento de las relaciones establecidas y calcular la solución al problema. De este hecho se desprende que:

1. El análisis de problemas empíricos bajo el marco del razonamiento configural (Torregrosa, 2017; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017b) nos permite identificar el instante en el que el alumno es consciente de que ha resuelto el problema (sabe cómo resolverlo), es decir, el momento en el que se da el truncamiento del razonamiento configural. Este hecho se torna más accesible que en los problemas de prueba clásicos, ya que se hace evidente el momento en el que los estudiantes dejan de realizar la conversión entre registros (geométrico-algebraico) y la coordinación entre aprehensiones que permiten conformar las relaciones que dan la solución al problema (truncamiento).
2. Una vez que se establecen en el registro algebraico las relaciones necesarias para resolver el problema, los estudiantes se limitan a realizar un tratamiento (con errores operativos o no) que les permite dar una solución al problema, obviando la configuración inicial y las subconfiguraciones relevantes (registro geométrico), no considerándolas, en la mayoría de casos analizados, ni para comprobar las soluciones calculadas o estudiar su coherencia. Por lo tanto, una vez que los alumnos modelan la situación geométrica planteada en el registro algebraico (en forma de ecuaciones, por ejemplo), sistematizan el proceso de resolución mediante un tratamiento.
3. Esta sistematización final del proceso de resolución implica el desarrollo de un razonamiento lógico-deductivo totalmente independiente de cualquier proceso de visualización, en consonancia con los resultados de Duval (2016a), ya que depende únicamente del mecanismo discursivo de sustitución de unas afirmaciones matemáticas por otras, y no de la composición de un discurso por acumulación de afirmaciones establecidas a partir de información inferida de la subconfiguración relevante identificada. Para el desenlace truncamiento, los estudiantes comienzan a construir su discurso escrito acumulando información extraída de las subconfiguraciones relevantes identificadas, hasta que establecen las relaciones necesarias y suficientes en el registro algebraico, para finalizarlo mediante un modo de sustitución con total independencia del registro geométrico. Esto no implica que puedan darse ciclos de acumulación-sustitución antes de modelar la situación geométrica, debido a la necesidad de obtener datos que permitan establecer relaciones en niveles más altos del razonamiento desarrollado. Por ejemplo, la necesidad de obtener el valor de la hipotenusa en P1, para establecer las relaciones que resuelven el problema.

4. Este hecho puede ser explicado por la existencia de un salto cognitivo (brecha) entre el razonamiento configural y la construcción del discurso, caracterizado por que:
   a) Los ciclos de aprehensión operativa-discursiva cesan.
   b) Los estudiantes dejan de realizar la conversión entre registros (geométrico-algebraico en nuestro caso), y continúan su discurso mediante tratamientos del registro algebraico.
   c) El papel que desempeña la configuración inicial cambia. La configuración posee un papel heurístico (manipulativo) mientras se realizan los ciclos del razonamiento configural, hasta que se obtienen las ideas claves que permitan resolverlo. Una vez logradas estas ideas, la configuración pasa a mostrar elementos geométricos relacionados entre sí, lo que facilita su visión conjunta (papel sinóptico), siendo omitida por los estudiantes durante el tratamiento que permite obtener la solución al problema, pero pudiendo volver a ser considerada para analizar la coherencia de las soluciones obtenidas.
   d) Los estudiantes empiezan a construir su discurso escrito acumulando información inferida de los ciclos de razonamiento, hasta que establecen las relaciones necesarias y suficientes en registro algebraico, truncando el razonamiento configural y resolviendo mediante el modo de sustitución, que puede ser totalmente independiente del registro geométrico.
   Una vez que se han producido estas características del truncamiento, la construcción del discurso escrito continúa, haciéndolo independiente, incluso, del contexto del problema. Estas características definen el proceso de truncamiento y pueden ayudarnos a comprender el desarrollo del discurso generado. Arzarello (2007) y Arzarello y sus colegas (2002, 2007) describen las transiciones entre las fases ascendente y descendente como una continuidad. Nosotros consideramos que las características encontradas indican un posible salto cognitivo entre el razonamiento configural y la generación del discurso, siendo el truncamiento necesario para la resolución de problemas geométricos.
5. Los estudiantes desarrollan un razonamiento basado en relaciones lógicas, definiciones o teoremas que sustituyen a la/s subconfiguración/es relevante/s identificada/s, en forma de afirmaciones matemáticas, a partir de las que construyen un razonamiento lógico-deductivo que permite el avance hacia la solución.

Respecto al desenlace conjetura sin demostración, identificamos dos tipologías o estrategias de resolución diferentes. En la primera, se hace uso del registro geométrico hasta finalizar el problema. Los estudiantes resuelven el problema a partir de información extraída de la subconfiguración relevante identificada, validando alguna de las afirmaciones matemáticas inferidas mediante mecanismos perceptivos (conjetura sin demostrar). Los estudiantes inician y finalizan su discurso escrito a partir de la acumulación de información, aunque encontramos casos (en P1) en los que se da un pequeño ciclo de acumulación-sustitución al determinar el valor de la hipotenusa, dato necesario para resolver el problema. Tras ello, su razonamiento continúa mediante la acumulación de información a partir de una conjetura inferida mediante un mecanismo de percepción. Los otros casos de conjeturas sin demostración se asemejan a los razonamientos que desembocan en truncamiento por la independencia que adquiere el registro algebraico respecto al geométrico una vez establecidas las relaciones necesarias, aunque basadas en inferencias erróneas o conjeturas no demostradas. Esto no impide que el alumno desarrolle un razonamiento lógico deductivo que le permita encontrar una solución al problema (aunque errónea). Los discursos escritos vinculados a esta tipología de conjetura sin demostración se desarrollan, al igual que sucede en los truncamientos, desde un modo de acumulación hasta un modo de sustitución, con la diferencia de que los estudiantes asumen la validez de alguna afirmación mediante percepción u otro mecanismo similar.

Por lo tanto, para generar un razonamiento que concluya en una solución correcta al problema, los estudiantes deben ser capaces de modelar la situación geométrica planteada en forma de relaciones en el registro algebraico, y realizar su posterior tratamiento. Una vez modelada la situación, el proceso de resolución se hace independiente de cualquier proceso de visualización, ya que cesa la necesidad de interactuar con la subconfiguración relevante identificada para resolver el problema. Es decir, no se realizan más ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas, lo que nos permite determinar de una forma más o menos precisa el momento en el que se da el truncamiento del razonamiento configural. Además, el discurso escrito debe ser construido desde el modo de acumulación al de sustitución. Sin embargo, estas condiciones, aunque necesarias, pueden no ser suficientes para establecer la solución correcta a los problemas, ya que la subconfiguración relevante identificada desempeña un papel determinante en el proceso de razonamiento desarrollado.

Los hechos descritos ponen de manifiesto la necesidad de investigaciones relacionadas con los factores que permiten o dificultan el proceso de resolución de problemas empíricos geométricos. La presente investigación nos hace plantearnos cuestiones como: ¿por qué no todos los estudiantes son capaces de modelar la situación geométrica planteada en el registro algebraico?; ¿por qué unos estudiantes son capaces de desarrollar, en un momento determinado, un razonamiento totalmente independiente de cualquier proceso de visualización, omitiendo por tanto el registro geométrico, incluso para acciones como comprobar la coherencia de los resultados obtenidos en la situación geométrica inicial?; ¿por qué otros estudiantes necesitan del registro geométrico para finalizar su razonamiento? Estas y otras cuestiones que pudieran quedar abiertas pueden servir de guía para estudios posteriores relacionados con los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas empíricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F. (2007). The proof in the 20th century: from Hilbert to automatic theorem proving introduction. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 43-64). Róterdam: Sense Publishers.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Robutti, O. y Paola, D. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th PME Conference* (vol. 2, pp. 24-31). Stellenbosch: PME.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM*, *34*(3), 66-72. https://doi.org/10.1007/bf02655708

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2007). The transition to formal proof in geometry. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 305-323). Róterdam, Sense Publishers.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM the International Journal on Mathematics Education*, *40*(3), 501-512. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0103-2

Barrantes, M. (2003). Caracterización de la enseñanza aprendizaje de la geometría en primaria y secundaria. *Campo Abierto*, *24*, 15-36.

Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales*, *8*(1), 25-42.

Clemente, F. y Llinares, S. (2015). Formas de discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestro en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 9-27. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1332

Clemente, F., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2017). Visualización y Razonamiento Configural. *BOLEMA. Boletim de Educaçao Matemática*, *31*(57), 497-516. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a24

Clemente, F., Torregrosa, G. y Llinares, S. (2015). La identificación de figuras prototípicas en el desarrollo del razonamiento configural. En P. Scott y Á. Ruiz (Eds.), *La Educación Matemática en las Américas: 2015* (vol. 9, pp. 130-140). México D.F.: CIAEM.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2016a). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-60). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2016b). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2016c). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 95-125). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Garuti, R., Boero, P. y Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th PME Conference* (pp. 345-352). Stellenbosch: PME.

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En Linda Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121-139). Londres: Routledge Falmer.

Koleza, E. y Kabani, E. (2006). The use of reasoning in the resolution of geometry. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *11*(3), 31-56.

Komatsu, K. (2016). A framework for proofs and refutations in school mathematics: Increasing content by deductive guessing. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 147-162. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9677-0

Llinares, S. y Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(3), 234-250. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921133

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 183-195. https://doi.org/10.1016/s0364-0213(99)80058-5

Reiss, K., Heinze, A., Renkl, A. y Gross, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM*, *40*(3), 455-467. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0105-0

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017a). Razonamiento configural y argumentación en procesos de prueba en contexto geométrico. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 467-476). Zaragoza: SEIEM.

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017b). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas empíricos en contexto geométrico. En *II Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe (II CEMACYC)*. Cali.

Stylianides, A. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Torregrosa, G. (2017). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *12*, 1-17.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 275-300.

Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 327-340. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n3.187

Configural reasoning and discourse development when solving empirical problems in a geometrical context

Antonio Saorín Villa, Germán Torregrosa Gironés, Humberto Quesada Vilella
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante. España.
ansaovi@gmail.com, german.torregrosa@ua.es, humberto.quesada@ua.es

The aim of this study is to identify the existing relationships in the cognitive processes involved in the resolution of empirical problems in a geometrical context, drawing on the configural reasoning model perspective, and to analyze how students develop their written discourses to reach the solution of these problems. We pay attention to the written answers belonging to 33 students of the Spanish first year bachelor's degree and which were given for two empirical problems in a geometrical context. Taking all of this into consideration we will be able to determine: 1) how students solve the problems from the visualization processes developed (coordinated cycles of operational and discursive apprehensions), and 2) how they organize the mathematical propositions established to construct the written discourse that will be used to communicate the solution and that reveals the reasoning developed during the problem-solving process.

Our findings show the influence of the implicit characteristics of the configurations presented on the configural reasoning outcomes identified and, therefore, on the reasoning process. In this sense, the analysis of empirical problems from the perspective of configural reasoning has allowed us to identify the moment when truncation occurs (the student is aware of how the problem can be solved) with greater precision than in more traditional geometrical proof problems. At this point, students stop making the conversion between registers (geometric-algebraic) and cease the coordinated cycles between operational and discursive apprehensions that lead to establish the mathematical relationships allowing the solving process and to finish the resolution of the problem, ignoring the initial configuration and the relevant subconfigurations previously identified, developing an independent reasoning from any visualization process.

On the other hand, in the identified truncations of the configural reasoning, the students start the construction of the written discourse establishing mathematical propositions that only reflect information extracted from the relevant subconfigurations identified (accumulation mode), until they establish those that allow to solve the problem. Then, they generate a logical, orderly and progressive written discourse in which each mathematical proposition is a logical consequence of the previous one (substitution mode), and which ends with the establishment of a solution to the problem. This way, our findings suggest the students' tendency to ignore the geometrical configuration presented once they have established, in the algebraic register, the necessary mathematical propositions that make the resolution of problems possible, showing the transition from the accumulation to the substitution modes in the reasoning process allowing them to establish a valid solution.

Therefore, in order to generate a reasoning process which leads to the correct solution of the problem, students must be able to establish the necessary and sufficient relationships in the algebraic register and to perform a following treatment of them with total independence from the geometric register. Additionally, the written discourse must be constructed from the accumulation mode to the substitution mode. These conditions, although necessary, may not be sufficient to establish the correct solution of the problems, since the identified subconfigurations play a decisive role in the reasoning process developed.